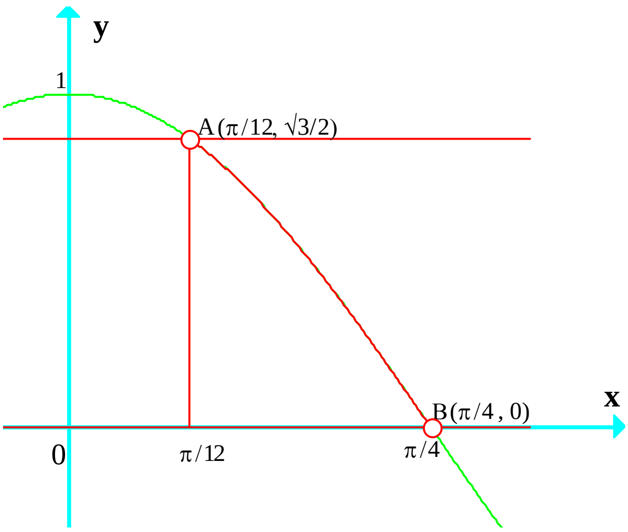
Quesito n. 6

Dobbiamo vedere per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ ha soluzioni per 15°<x<45°.

Intanto $k \neq 0$ (altrimenti si ha 2=0 e l'equazione è impossibile) e $\cos 2x = \dfrac{5k-2}{k}$ con 30°<$2x$<90° ⇒

$$\cos 90° < \cos 2x = \frac{5k-2}{k} < \cos 30° \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{10k-4-\sqrt{3}k}{2k} < 0 \Rightarrow \dfrac{\left(10-\sqrt{3}\right)k-4}{2k} < 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} > 0 \end{cases}.$$

Risolvendo le due disequazioni si ha: $\begin{cases} 0 < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}} \\ k < 0 \vee k > \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{5} < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}}$



Oppure:

L'equazione $\cos 2x = \dfrac{5k-2}{k}$ si può interpretare come l'intersezione tra le curve $y = \cos 2x$ e $y = \dfrac{5k-2}{k}$ (fascio di rette orizzontali) nell'intervallo $\left]\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{4}\right[$;

si ha:

retta per A: $\dfrac{5k-2}{k} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow k = \dfrac{4}{10-\sqrt{3}}$;

retta per B: $\dfrac{5k-2}{k} = 0 \Rightarrow k = \dfrac{2}{5}$;

si ottiene quindi: 1 soluz. per $\dfrac{2}{5} < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}}$

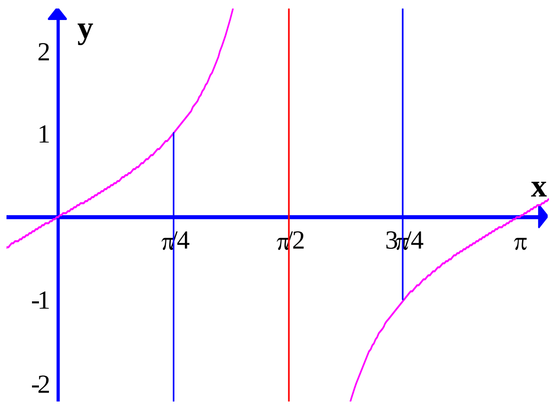
Quesito n. 7

La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ è una funzione algebrica razionale intera e quindi continua e derivabile su tutto l'asse reale ed in particolare continua in [0, 1] e derivabile in]0, 1[e quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, ne segue che esisterà $\xi \in$]0, 1[tale che $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Rightarrow \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{-1}{1} = 3\xi^2 - 4\xi$ da cui:

$3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{3} \\ \xi_2 = 1 \end{cases}$; delle soluzioni è accettabile solamente $\xi_1 = \dfrac{1}{3}$ poiché $\xi_2 = 1 \notin]0,1[$.

Quesito n. 8

La funzione $f(x) = \tan x$, non è continua nell'intervallo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ in quanto non definita in $x = \dfrac{\pi}{2}$, ove presenta un asintoto verticale, e quindi non si può applicare il teorema dell'esistenza degli zeri e nulla si può concludere su $f(x) = 0$ anche se $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$ e $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 < 0$; tale funzione, vedi grafico a lato, non ha infatti intersezioni con l'asse x in detto intervallo.



Quesito n. 9

Poiché la $f(x)$ è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e coincide con la sua derivata prima, si ha:

$$f'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 1\,dx \Rightarrow \ln|f(x)| = x + c$$

e quindi

$$\ln|f(x)| = x + c \Rightarrow |f(x)| = e^{x+c} = e^c \cdot e^x \Rightarrow f(x) = \pm e^c \cdot e^x = k \cdot e^x$$

dove si è posto $\pm e^c = k$.

Poiché inoltre $f(0) = 1$ si ha $f(x) = k \cdot e^x \Rightarrow 1 = k \cdot e^0 \Rightarrow k = 1$ e quindi la funzione richiesta è $f(x) = e^x$.

Si poteva giungere brevemente allo stesso risultato ricordando che $f(x) = e^x$ è l'unica funzione (derivabile e sempre diversa da zero) che coincide con la sua derivata prima e passa per il punto (0,1).

Quesito n. 10

La funzione $f(x) = a\sin x + b\cos x$, definita e derivabile su tutto l'asse reale, ha come derivata prima $f'(x) = a\cos x - b\sin x$; le condizioni $x = \frac{4\pi}{3}$ estremante e $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$, portano al sistema:

$$\begin{cases} f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - b\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \\ a\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + b\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(-\frac{1}{2}\right) - b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3}\,b \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}.$$

La funzione pertanto ha equazione $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, che può scriversi (ricordando le formule di addizione) $f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ da cui si deduce facilmente che la funzione ha periodo $T = 2\pi$.