Quesito n. 1

Il numero dei chicchi di grano disposti sulla scacchiera è dato dalla somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione 2 ed n=64

Si ha infatti:

$Sn = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$ con

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{64} = 2^0 \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 .$$

Indicato con P_g il peso totale totale espresso in grammi e P_{ton} quello espresso in tonnellate si ha:

$$P_{ton} = P_g \cdot 10^{-6} = \left[\left(2^{64} - 1\right) \cdot 38 \cdot 10^{-3}\right] \cdot 10^{-6} \simeq \frac{1{,}8447 \cdot 10^{19} \cdot 38}{10^9} \simeq \frac{7{,}0098 \cdot 10^{20}}{10^9} \simeq 7{,}0098 \cdot 10^{11}$$

Quesito n. 2

Ricordiamo che i poliedri regolari sono, nello spazio, gli analoghi dei poligoni regolari sul piano, ma mentre i vi sono poligoni regolari aventi un qualsiasi numero di lati, il numero delle facce (e dei vertici) di un poliedro regolare, assume solamente valori particolari.

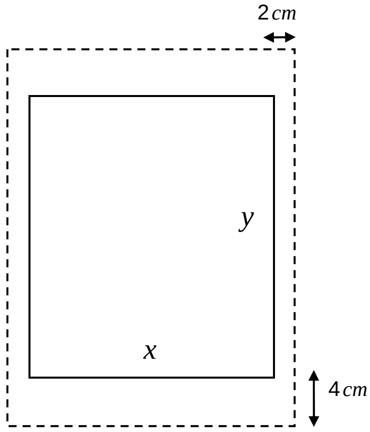
Infatti in ogni vertice di un poliedro regolare devono concorrere almeno tre facce costituite da poligoni regolari e la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere strettamente minore di un angolo giro. Pertanto:

- se le facce che concorrono in un vertice sono triangoli equilateri (e quindi gli angoli di 60°), si potranno avere tre casi: 3 facce (somma degli angoli uguale a 180°), 4 facce (somma degli angoli uguale a 240°), 5 facce (somma degli angoli uguale a 300°). In corrispondenza a tali possibilità si trovano rispettivamente il TETRAEDRO (quattro triangoli equilateri), l'OTTAEDRO (otto triangoli equilateri), l'ICOSAEDRO (venti triangoli equilateri).
- se le facce che concorrono in un vertice sono quadrati (e quindi gli angoli di 90°), si potrà avere solo un caso: 3 facce (somma degli angoli uguale a 270°), cioè il caso del CUBO (o ESAEDRO).
- se le facce che concorrono in un vertice sono pentagoni regolari (e quindi gli angoli di 108°) si potrà avere solo un caso: 3 facce (somma degli angoli uguale a 324°), cioè il caso del DODECAEDRO (12 pentagoni regolari).

Non potranno aversi poliedri regolari aventi facce costituite da esagoni regolari (e quindi con angoli di 120°), poiché la somma darebbe già 360°, mentre la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere strettamente minore di un angolo giro.

Quesito n. 3

Il rettangolo con bordo continuo rappresenta l'area di stampa di dimensioni x e y, mentre il rettangolo con bordo tratteggiato rappresenta il foglio di carta che avrà pertanto dimensioni $x + 4$ e $y + 8$.



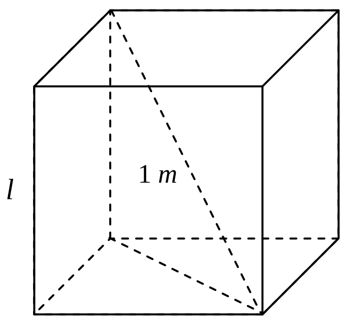
È richiesto trovare il minimo della funzione $A=(x+4)(y+8)$, sotto la condizione $x \cdot y = 50$, ciò significa minimizzare la funzione:

$$A(x) = (x+4)(y+8) = (x+4)\left(\frac{50}{x} + 8\right) = \frac{200}{x} + 8x + 82, \text{ con } x > 0.$$

S i ottiene:

$$A'(x) = \frac{-200}{x^2} + 8 = \frac{-200 + 8x^2}{x^2} \Rightarrow A'(x) = 0 \text{ per } x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5,$$ dove la soluzione negativa non è accettabile

Dallo studio del segno della derivata prima si ottiene che $A'(x) \geq 0$ per $x > 5$ e quindi il minimo si ottiene per $x=5$; per tale valore di x si avrà $y = 10$ e quindi il foglio di carta dovrà avere dimensioni 9 cm e 18 cm.



Quesito n. 4

La diagonale d del cubo è uguale al diametro della sfera in cui è inscritto, cioè è uguale ad 1 m.

Ricordiamo che:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = l\sqrt{3} \Rightarrow d = 1m = l\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ m .$$

Il suo volume sarà pertanto:

$$V = l^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 m^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}\, m^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 10^3\ dm^3 \simeq 0{,}19245 \cdot 10^3\ dm^3 \simeq 192{,}45\ litri$$

Quesito n. 5

Ricordiamo la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad (1).$$

La somma dei coefficienti sarà:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ e ponendo $a = b = 1$ nella (1) si ottiene:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$