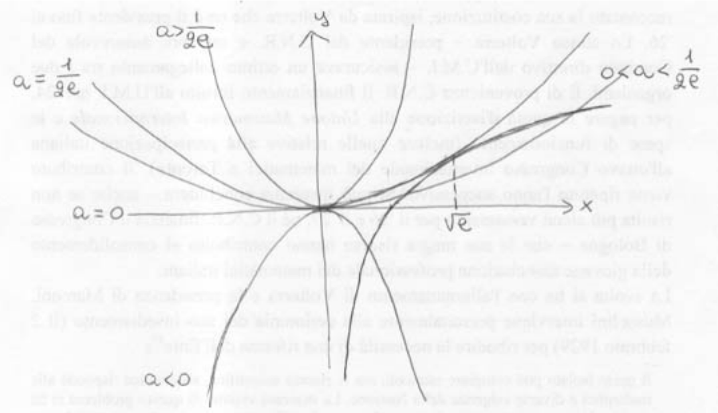
LICEO

Problema 2)

1. Per determinare il valore del parametro a per cui i grafici delle funzioni $f(x)=\ln x$ e $g(x)=ax^2$ risultano tangenti, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \ln x = ax^2 \\ \dfrac{1}{x} = 2ax \end{cases}$$

che ammette come soluzione $a = \dfrac{1}{2e}$ (e $x = \sqrt{e}$, punto di tangenza)

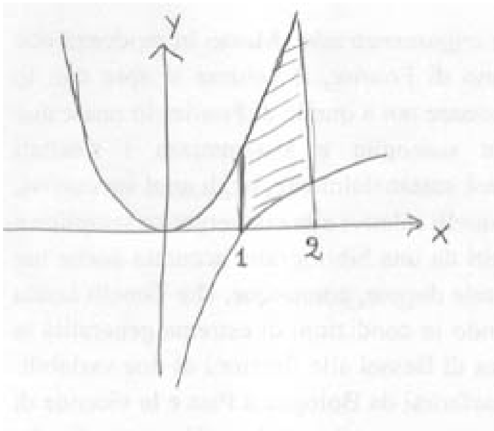


Quindi, l'equazione $\ln x=ax^2$ ammette:
- •una soluzione per $a\leq 0$;
- •due soluzioni (distinte) per $0<a<1/2e$;
- •due soluzioni coincidenti per $a=1/2e$;
- •nessuna soluzione per a>1/2e.

2. L'area richiesta è data dal calcolo dell'integrale:

$$S = \int_1^2 (x^2 - \ln x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\ln x + x \right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - 2\ln 2 + 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{10}{3} - 2\ln 2$$



3. Consideriamo (per esempio) a=1 e studiamo la funzione $h(x)=\ln x-x^2$, definita per x>0. Dalle considerazioni fatte nel punto 1, sappiamo che $h(x)<0\ \ \forall x$. Inoltre:

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty = \lim_{x\to +\infty} h(x)$.

Da $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x > 0$ per $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, si deduce che $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di massimo assoluto.

Da $h''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 2 < 0 \quad \forall x > 0$, si deduce che la funzione $h(x)$ è concava.