

Problema 1)

- a) se l è la misura del perimetro del rettangolo, la misura dei lati dello stesso sarà $l/4 + \varepsilon$ e $l/4 - \varepsilon$. L'area è dunque $l^2/16 - \varepsilon^2$. Poiché ε^2 è positivo l'area massima sarà $l^2/16$ in corrispondenza di $\varepsilon=0$ e del rettangolo coi lati tutti uguali a $l/4$ ovvero un quadrato.

Sia x la lunghezza della porzione di filo con cui si delimita l'aiuola circolare e $l-x$ quella della porzione di filo che delimita l'aiuola quadrata. Allora $x/2\pi$ è il raggio dell'aiuola circolare e $(l-x)/4$ è il lato dell'aiuola quadrata.

Ne segue che l'area dell'aiuola circolare è:

$$A_C = \frac{x^2}{4\pi^2} \pi = \frac{x^2}{4\pi}$$

e l'area dell'aiuola quadrata è:

$$A_Q = \frac{(l-x)^2}{16} = \frac{x^2 - 2lx + l^2}{16}$$

Sommando si ottiene la funzione :

$$A = \frac{(4+\pi)x^2 - 2l\pi x + l^2\pi}{16\pi}$$

da studiare nell'intervallo $0 \leq x \leq l$. Il suo grafico rappresenta una parabola con concavità rivolta verso l'alto e di vertice $\left(\frac{\pi}{4+\pi}l; \frac{1}{4(4+\pi)}l^2 \right)$.

Inoltre $A(0) = \frac{l^2}{16}$ e $A(l) = \frac{1}{4\pi}l^2$. Se ne conclude che :

- b) la somma delle due aree è minima $\left(\frac{1}{4(4+\pi)}l^2 \right)$ quando si usa $\frac{\pi}{4+\pi}l$ del filo per recintare un'aiuola circolare e il rimanente per l'aiuola quadrata.
- c) la somma delle due aree è massima $\left(\frac{1}{4\pi}l^2 \right)$ quando si usa tutto il filo per l'aiuola circolare.

Infine chiamate a, b, c le lunghezze del parallelepipedo rettangolo iniziale e $1.1 \cdot a$, $1.1 \cdot b$, $1.1 \cdot c$ quelle del parallelepipedo modificato, il volume del primo è $a \cdot b \cdot c$ e il volume del secondo è $1.331 \cdot a \cdot b \cdot c$ con un incremento dunque del 33.1 % rispetto al primo.