

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto 1

Poiché, pur non specificato nel testo, si intende $\log x$ in base e , da questo momento scriveremo $\ln x$.

La funzione data $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \end{cases}$ per $x > 0$, è una funzione “definita a tratti”, definita

nell'intervallo $[0; +\infty[$, derivabile per $x > 0$, perché somma o prodotto di funzioni derivabili, e pertanto anche continua.

Dobbiamo verificare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 0$.

Intanto la funzione è continua in $x = 0$ poiché si ha:

$f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \right]$, dove per calcolare il limite abbiamo sfruttato il limite notevole

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$, da calcolarsi eventualmente con la regola di De l'Hospital.

Per quanto riguarda la derivabilità, intanto si ha:

$$f'(x) = x(3 - 2\ln x) + \frac{1}{2}x^2 \left(-\frac{2}{x} \right) = 2x(1 - \ln x)$$

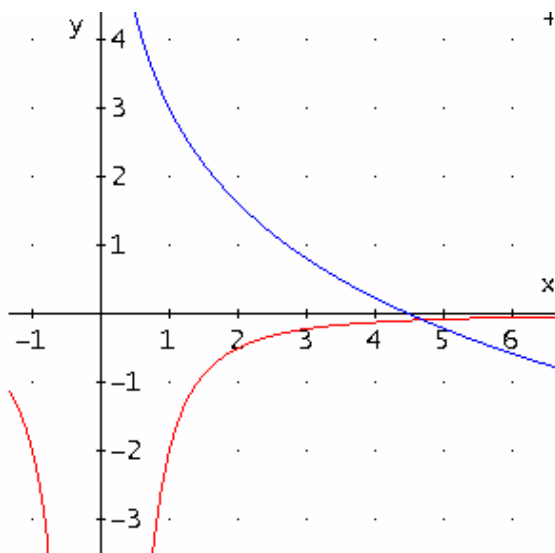
che ovviamente non esiste per $x = 0$.

Si ha però:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2x(1 - \ln x) = 0 \quad (\text{sempre sfruttando il limite notevole}),$$

per cui dunque si può prolungare la derivata prima per continuità anche nel punto $x = 0$, definendo la derivata prima come segue:

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(x) = 2x(1 - \ln x) \quad \text{per } x > 0 \end{cases}$$



+ Punto 2

Dobbiamo ora dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica radice in $[0; +\infty[$.

Poiché $\frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 = 0$ equivale a $3 - 2\ln x = -\frac{2}{x^2}$,

basterà far vedere che le due curve si incontrano in un unico punto. Dal confronto dei loro grafici (le curve sono facilmente rappresentabili per simmetrie, dilatazioni e traslazioni), si osserva che effettivamente si incontrano in

un unico punto di ascissa $\alpha > e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,48$.

Applicando il teorema dell'esistenza degli zeri, si osserva che la soluzione $\alpha \in]4; 5[$.

Si ha infatti: $f(4) = 2,8193 > 0$ e $f(5) = -1,7359 < 0$

Punto 3

A questo punto andiamo a disegnare il grafico C della

curva data.

Dominio: $[0; +\infty[$,

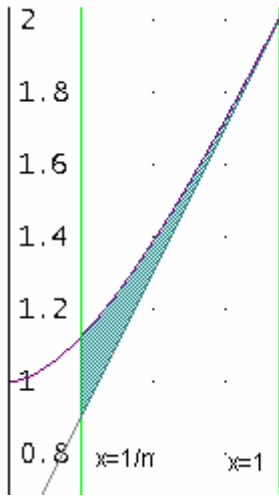
Intersezioni con gli assi: L'intersezione con l'asse y è $y = 1$; la intersezione con l'asse x è, come già visto, $\alpha \simeq 4,69$.

Studio del segno: Dalla rappresentazione grafica si ha che $f(x) > 0 \Rightarrow 3 - 2\ln x > -\frac{2}{x^2}$ e quindi $f(x) > 0$

per $x > \alpha \simeq 4,69$

Comportamento agli estremi del dominio:

Come già osservato $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.



Eventuali asintoti:

la funzione può presentare eventualmente solo un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$; si ha

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (3 - 2 \ln x) + \frac{1}{x} = 0 + 0 = 0$$

e quindi non ha

asintoti di alcun genere.

Derivata prima:

Come già

trovato $f'(x) = 2x(1 - \ln x) \Rightarrow f'(x) = 0$ per $x = 0$ (n.a., ma comunque punto a tangente orizzontale) e $x = e$.

Crescita e decrescita:

$$f'(x) = 2x(1 - \ln x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < e \Rightarrow$$

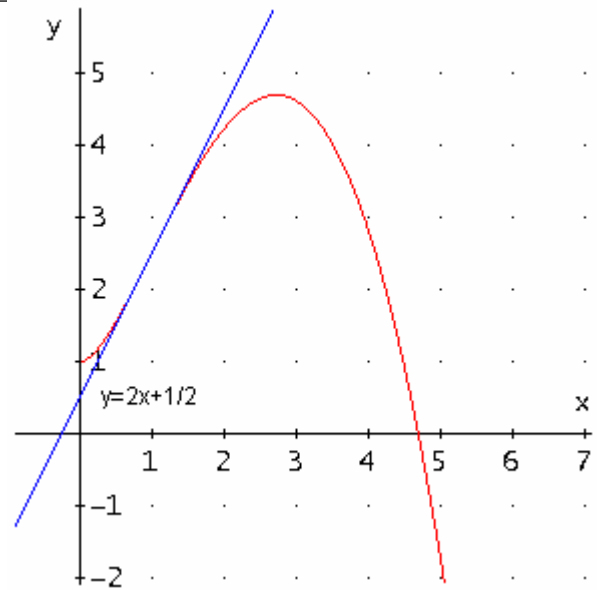
$M\left(e; \frac{e^2}{2} + 1 \simeq 4,69\right)$ è un punto di massimo relativo.

Derivata seconda:

$$f''(x) = 2(1 - \ln x) - 2x \frac{1}{x} = -2 \ln x \quad \text{che si annulla per} \quad x = 1.$$

Concavità e convessità:

$$f''(x) = -2 \ln x > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1 \Rightarrow F\left(1; \frac{5}{2}\right) \text{ è punto di flesso.}$$



Determiniamo ora l'equazione della retta tangente nel punto $F\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

$$\text{Poiché } f'(1) = 2 \text{ si ha: } y - \frac{5}{2} = f'(1)(x - 1) = 2x + \frac{1}{2}.$$

Punto 4

Per calcolare l'area richiesta, si ha:

$$A_n = \int_{1/n}^1 \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx \quad \text{e dopo aver integrato per scomposizione e per}$$

$$\text{parti } A_n = \left[\frac{11}{18} x^3 + \frac{1}{2} x - x^2 - \frac{x^3}{3} \ln x \right]_{1/n}^1 \Rightarrow A_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{3n^3} \ln \frac{1}{n}.$$

Punto 5

Il limite di tale area è:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{9},$$

in quanto tutti gli altri termini tendono a zero per $x \rightarrow +\infty$.

$$\text{In particolare: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n^3} \ln \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n^2} \cdot \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \text{ ove, quest'ultimo è un}$$

limite notevole che tende a zero.

Tale limite rappresenta l'area della regione di piano compresa tra la curva, la tangente di flesso e l'asse delle ordinate (in quanto per $n \rightarrow +\infty$ la retta $x = \frac{1}{n}$ tende alla retta $x=0$, cioè all'asse delle ordinate).