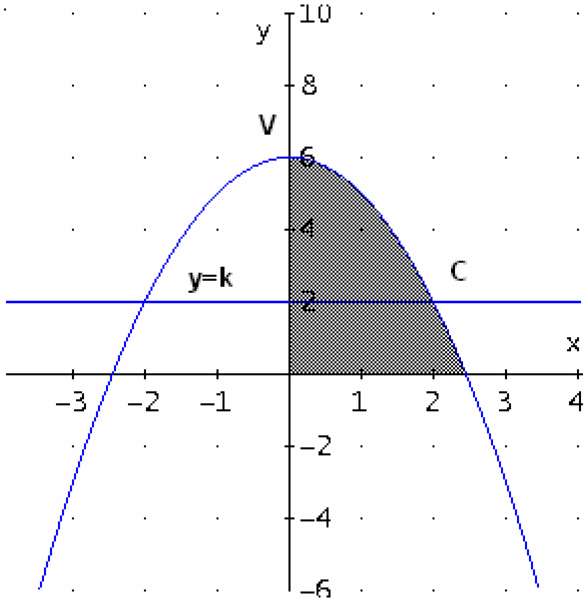
Problema N. 1 (Corso di ordinamento)

La parabola $y = 6 - x^2$, che volge la concavità verso il basso, ha asse di simmetria coincidente con l'asse y, vertice nel punto $V(0;6)$ e interseca l'asse delle ascisse nei punti di coordinate $\left(-\sqrt{6};0\right)$ e $\left(\sqrt{6};0\right)$.

1. Dall'equazione della parabola $y = 6 - x^2$ ricaviamo la funzione inversa $x = \pm\sqrt{6-y}$ e per quanto richiesto la funzione posta nel I quadrante $x = \sqrt{6-y}$.
   Il volume richiesto sarà pertanto dato da:
   $$V = \pi\int_0^6 \left[f^{-1}(y)\right]^2 dy = \pi\int_0^6 \left[\sqrt{6-y}\right]^2 dy = \pi\left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^6 = \pi[36-18] = 18\pi \simeq 56{,}55\,.$$

2. Inizialmente faremo una traslazione di assi che porti l'asse delle x a coincidere con la retta y=6 (e quindi la parabola ad avere il vertice nella nuova origine $O'(6;0)$) e successivamente, per calcolare il volume V_2 richiesto, faremo la differenza tra il volume $V_{(CIL)}$ del cilindro ottenuto ruotando il rettangolo di base (altezza del cilindro) $\sqrt{6}$ ed altezza (raggio di base del cilindro) 6 e il volume V_T ottenuto dalla rotazione, sempre intorno all'asse x, del triangolo mistilineo delimitato dalla parabola, dall'asse x e dalla retta $x = \sqrt{6}$.

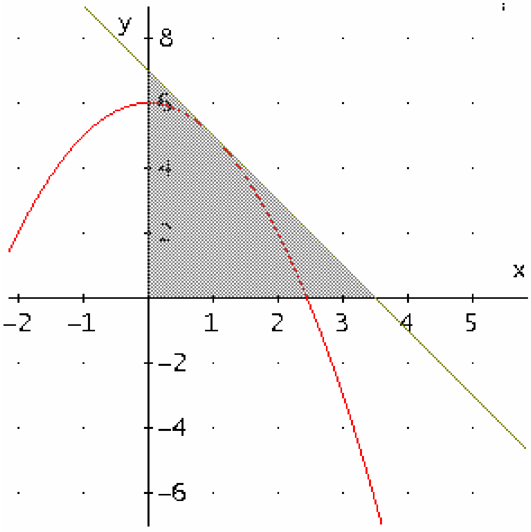


   La traslazione sarà: $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + 6 \end{cases}$
   per cui la parabola nel sistema $XO'Y$ avrà equazione: $Y + 6 = 6 - X^2 \Rightarrow Y = -X^2$. Si ha quindi:
   $V_{(CIL)} = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow \pi 6^2 \cdot \sqrt{6} = 36\pi\sqrt{6}$; per calcolare il secondo volume, prendiamo la simmetrica rispetto all'asse x.
   $$V_T = \pi\int_0^{\sqrt{6}} \left(X^2\right)^2 dx = \pi\left[\frac{X^5}{5}\right]_0^{\sqrt{6}} = \pi\frac{36}{5}\sqrt{6} \text{ e quindi: } V_2 = V_{(CIL)} - V_T = \pi\cdot 36\cdot\sqrt{6}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{144}{5}\pi\sqrt{6}$$

3. Intanto l'area di R, sarà la metà dell'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola e dall'asse x; applicando il teorema di Archimede si avrà: $\frac{S}{2} = R = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 6\right) = 4\sqrt{6}$.

   La retta y = k interseca la parabola nei punti di ascissa $x = \pm\sqrt{6-k}$; e quindi l'area individuata su R dalla retta y = k (con 0 < k < 6) si può ancora calcolare utilizzando ancora il teorema di Archimede:
   $$\frac{R}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{6-k}\cdot(6-k)\right) = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{(6-k)^3} = \sqrt{6} \text{ ed infine;}$$
   $$(6-k)^3 = 9\cdot 6 \Rightarrow (6-k) = \sqrt[3]{54} \Rightarrow k = 6 - 3\sqrt[3]{2} \simeq 2{,}22$$

4. Poiché $y' = 2x$ l'equazione della tangente nel punto $P(t, 6 - t^2)$ è:
   $$y - 6 + t^2 = -2t(x-t) \Rightarrow y = -2tx + 6 + t^2$$



Tale retta interseca l'asse delle ascisse nel punto di ascissa $\frac{t^2+6}{2t}$ e l'asse delle ordinate nel punto di ordinata t^2+6. L'area del triangolo risulta perciò $(0<t<\sqrt{6})$:

$$A(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^2+6}{2t}\right)\cdot\left(t^2+6\right)=\frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$$

Il valore di $A(1)$ è dunque $\frac{49}{4}$.

5. La derivata prima della funzione $A(t)$ è:

$$A'(t)=\frac{\left[2\left(t^2+6\right)2t\right]4t-4\left(t^2+6\right)^2}{16t^2}=\frac{4\left(t^2+6\right)\left[4t^2-\left(t^2+6\right)\right]}{16t^2}=\frac{3\left(t^2+6\right)\left(t^2-2\right)}{4t^2}$$

La derivata prima si annulla per $t=\pm\sqrt{2}$ (la soluzione negativa non è accettabile) e risulta positiva per $t<-\sqrt{2}\vee t>\sqrt{2}$. Il valore minimo dell'area è assunto perciò per $t=\sqrt{2}$ e il valore di tale area è $A=8\sqrt{2}\simeq 13{,}31$.