

PROBLEMA 1

La funzione $f(x) = 2x - x^3$ è una funzione dispari (una cubica): il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine; studiamola allora solo per $x \geq 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (senza ovviamente avere asintoto obliquo).

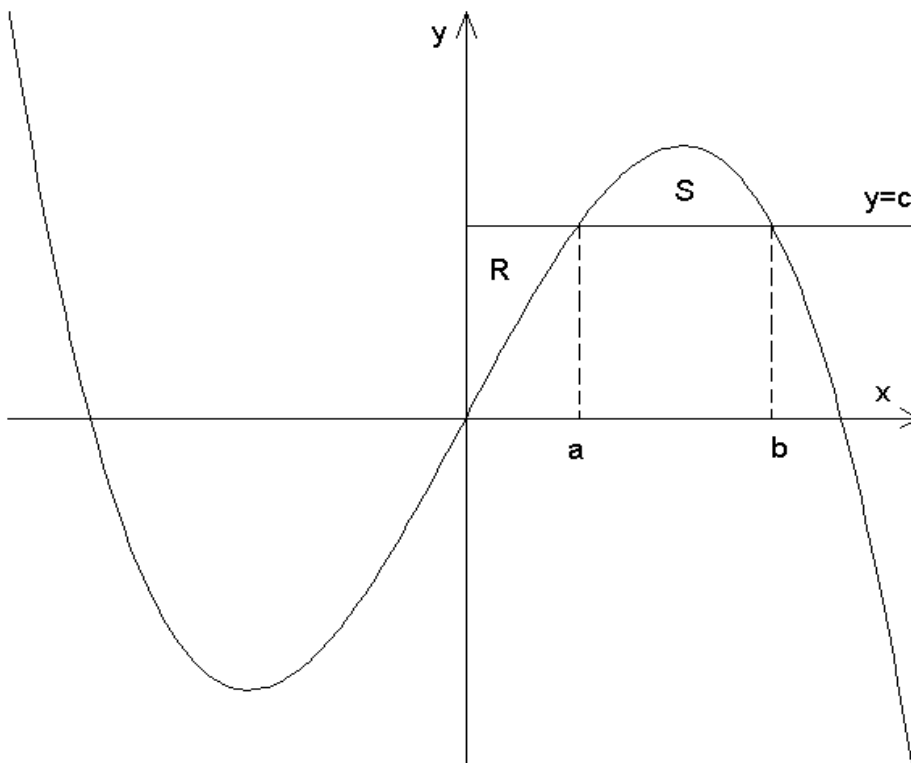
La funzione ammette tre zeri, nei punti $x = 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Dal calcolo della derivata prima $y' = -9x^2 + 2$, si ottiene che la funzione ha due punti di stazionarietà $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$; in particolare $x = +\frac{\sqrt{2}}{3}$ è un punto di massimo relativo ma non assoluto e

$x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ è un punto di minimo relativo (ma non assoluto).

La derivata seconda $y'' = -18x$ si annulla in $x = 0$ che risulta essere un punto di flesso; in particolare per $x < 0$ la funzione è convessa, per $x > 0$ la funzione è concava.

Grafico della funzione:



Indichiamo con a, b le ascisse dei punti di intersezioni tra il grafico della funzione e la retta di equazione $y = c$: a e b sono dunque le soluzioni dell'equazione $-3x^3 + 2x = c$.

Sappiamo che l'area di R è equivalente all'area di S :

$$\int_0^a (c - 2x + 3x^3) dx = \int_a^b (2x - 3x^3 - c) dx$$

ovvero:

$$\left[x^2 - \frac{3}{4}x^4 - cx \right]_a^b = \left[cx - x^2 + \frac{3}{4}x^4 \right]_0^a$$

Risulta allora:

$$-\frac{3}{4}b^4 + b^2 - cb = 0$$

Escludendo la soluzione $b = 0$ e ricordando che b deve soddisfare anche l'equazione

$-3x^3 + 2x = c$, si ottiene:

$$\begin{cases} 2b - 3b^3 = c \\ -\frac{3}{4}b^3 + b = c \end{cases} \text{ da cui si ricava } b = 2/3 \text{ e } c = 4/9$$

A questo punto, occorre trovare l'altra intersezione con la retta ($x = a$); ricordando che a è soluzione di una equazione di terzo grado della quale conosciamo già una radice ($b = 2/3$) e usando il teorema

di Ruffini si trova $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{3}$.

Per determinare la funzione g simmetrica di f rispetto alla retta di equazione $y = 4/9$, possiamo disegnare il grafico di f e traslarlo verso il basso di $4/9$ ($y = 2x - 3x^3 - \frac{4}{9}$), poi considerare il suo

simmetrico rispetto all'asse x ($y = -2x + 3x^3 + \frac{4}{9}$) e infine traslarlo nuovamente. Otteniamo così:

$$y = -2x + 3x^3 + \frac{8}{9}.$$