QUESITI (6-10) ORDINAMENTO

Quesito n. 6

La funzione f è una funzione composta del tipo $f[k(x)] = \int_0^k e^{-t^2}\,dt$ con $k = k(x) = x^2$, pertanto la sua derivata prima è: $f'(x) = f'[k(x)] = f'(k) \cdot k'(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = e^{-k^2} \cdot k'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x$, poiché $k'(x) = 2x$ e, come già detto, $k = k(x) = x^2$.

Quesito n. 7

La risposta corretta è la D.

Per far comprendere il ragionamento partiamo ad es. da $n = 3$. In questo caso possiamo scrivere:

$(1+2+3)^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) + 2\left(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3\right)$ da cui ricavo:

$\left(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3\right) = \frac{1}{2}\left[(1+2+3)^2 - \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)\right]$; la quantità al primo membro è esattamente il prodotto dei primi tre numeri a due a due in tutti i modi possibili (combinazioni).

In generale si ha: $(1+2+3+\ldots+n)^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2\right) + 2\left(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \ldots + 1\cdot n + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n + \ldots\right)$

da cui: $\left(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \ldots + 1\cdot n + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n + \ldots\right) = \frac{1}{2}\left[(1+2+3+\ldots+n)^2 - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2\right)\right]$ ove il primo membro, che indicheremo con S, esattamente il prodotto dei primi numeri a due a due in tutti i modi possibili (combinazioni).

Ricordando le formule: $\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ e $(1+2+3+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$ si ottiene infatti: $S = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right] = \ldots = \frac{1}{24}n\left(n^2-1\right)(3n+2)$.

Quesito n. 8

Poiché $\left(x^3 - y^3\right) = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 2\left(x^2 + xy + y^2\right)$ il numero richiesto è divisibile per 2 e quindi le risposte **C)** e **D)** sono da scartare. Rimane da stabilire se $\left(x^2 + xy + y^2\right)$ è divisibile per 3.

Poiché $x - y = 2$ possiamo dedurre che x ed y sono due numeri dispari successivi che possiamo indicare con: $x = 2n+1$ e $y = 2n-1$. Sostituendo si ha:

$$x^2 + xy + y^2 = (2n+1)^2 + (2n+1)(2n-1) + (2n-1)^2 = 12n^2 + 1 = 3\cdot\left(4n^2\right) + 1$$

che non è ovviamente divisibile per 3 $\Rightarrow$ la risposta corretta è la **B)**.

Quesito n. 9

Si tratta di calcolare le possibili combinazioni di 3 oggetti scelti fra 88 (i 90 numeri dell'urna, tranne 1 e 90)

Otteniamo allora il seguente numero di cinquine: $C_{88,3} \cdot C_{2,2} = C_{88,3} \cdot 1 = \binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3!} = 109.736$.

Quesito n. 10

L'affermazione è vera in quanto è un'applicazione della regola del cambiamento di base. Si ha infatti:

$\log_2 3 = \frac{\log_a 3}{\log_a 2}$ e $\log_3 2 = \frac{\log_a 2}{\log_a 3}$, da cui: $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \frac{\log_a 3}{\log_a 2} \cdot \frac{\log_a 2}{\log_a 3} = 1$.