

SOLUZIONE PROBLEMA N. 2 (ORDINAMENTO)

A) La funzione data può scriversi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+2m} & \text{per } m > 0 \\ \frac{2x+1}{x^2} & \text{per } m \leq 0 \end{cases}, \text{ da cui la funzione è definita e derivabile } \forall x \in \mathbb{R} \text{ quando } m \text{ è positivo e}$$

definita e derivabile $\forall x \neq 0$ quando m è negativo o nullo.

Pertanto il suo dominio di derivabilità è $\mathbb{R} - \{0\}$.

B) Poiché la funzione è indipendente dal parametro per $m \leq 0$, basterà derivare la prima parte, cioè

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m} \text{ per } m > 0. \text{ Si ottiene:}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2m) - 2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 4m}{(x^2+2m)^2}$$

$$\text{e quindi } f'(1) = -2 - 2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 1$$

C) Studio della funzione

La funzione da studiare è allora: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$

Domínio: \mathbb{R}

Eventuali simmetrie particolari: la f non è pari e non è dispari

Intersezioni con gli assi: $A(-1/2; 0)$ con l'asse x e $B(0, 1/2)$ con l'asse y .

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0$$

Eventuali asintoti:

La f non ha asintoti verticali, mentre ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.

Derivata prima:

Sostituendo il valore di m nel calcolo già effettuato si ha:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2}; \text{ segue che } f'(x) = 0 \text{ per}$$

$$-2x^2 - 2x + 4 = 0, \text{ cioè per } x=1 \text{ e } x=-2.$$

Crescita e decrescita: $f'(x) > 0$ per $-2 < x < 1$, da cui $M(1, 1)$ è massimo relativo e $m(-2, -1/2)$ è minimo relativo.

$$\text{Derivata seconda: } f''(x) = \frac{-2 \left[(2x+1)(x^2+2)^2 - 4x(x^2+2)(x^2+x-2) \right]}{(x^2+2)^4} = \dots = \frac{2(2x^3 + 3x^2 - 12x - 2)}{(x^2+2)^3}.$$

La derivata seconda uguagliata a zero è un'equazione di terzo grado che non si scompone con la regola di Ruffini, ma, tenuto conto che la funzione è continua, che ha un massimo di ordinata positiva ed un minimo di ordinata negativa e che tende all'asintoto orizzontale $y=0$ "da sotto" per $x \rightarrow -\infty$ e "da sopra" per $x \rightarrow +\infty$ dovrà avere necessariamente tre flessi F_1, F_2 ed F_3 con $F_1 < -2, -2 < F_2 < 1$ e $F_3 > 1$.

Il grafico è riportato in figura 1.

D) Per calcolare l'area richiesta occorre calcolare l'integrale :

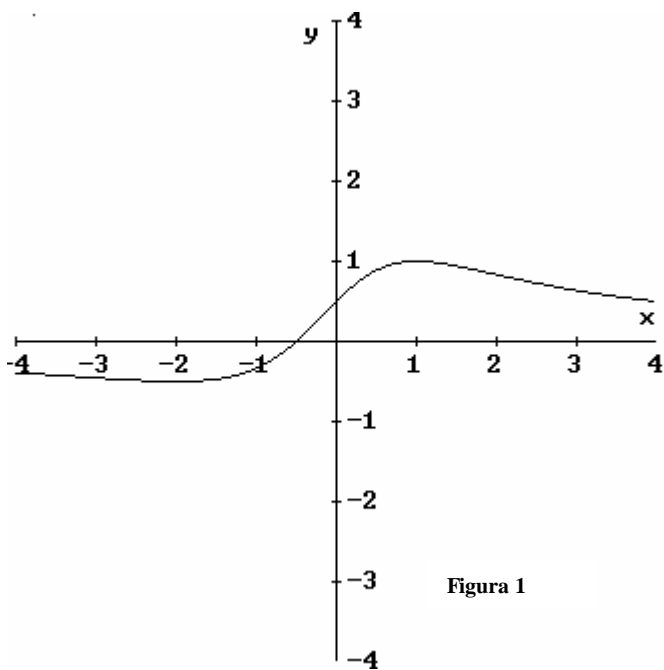


Figura 1

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \text{ ovvero}$$

$$A = \left[\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \ln \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\arctan \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctan \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

