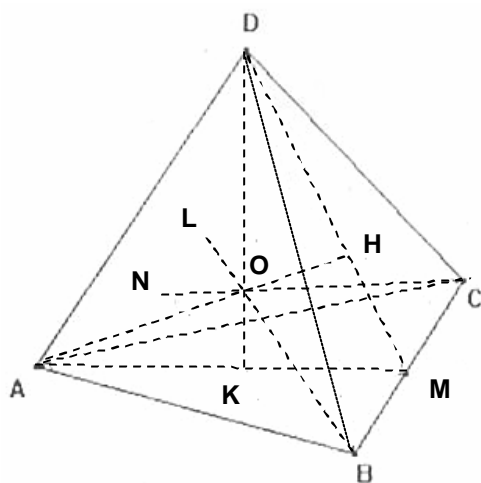


RISOLUZIONE PROBLEMA 1 ORDINAMENTO



A) Indicato con s lo spigolo del tetraedro, intanto possiamo osservare che $\overline{DM} = \overline{AM} = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ rappresentano le altezze, mediane e bisettrici delle rispettive facce, per cui $\overline{KM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{s}{6}\sqrt{3}$ e l'altezza del tetraedro $\overline{DK} = \frac{s}{3}\sqrt{6}$ (teorema di Pitagora).

Tracciate dai vertici A, B e C le altre altezze relative alle facce opposte, sia O il punto d'incontro di tali altezze (detto *baricentro* del tetraedro); O è anche il centro della sfera inscritta e $OL=OH=OK=ON=r$ sono i raggi della sfera. Dalla similitudine dei triangoli DKM e DOH , possiamo dedurre che:

$$\overline{OH} : \overline{KM} = \overline{DH} : \overline{DK} \text{ da cui } r : \frac{s}{6}\sqrt{3} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} \right) : \frac{s}{3}\sqrt{6}.$$

Ne segue che $r = \frac{2s^2 \cdot 3}{36} \cdot \frac{3}{s\sqrt{6}} = \frac{s\sqrt{6}}{12}$ da cui si deduce che il

raggio della sfera inscritta è $\frac{1}{4}$ dell'altezza DK .

Si ha infine, ricordando le relazioni sopra trovate, che S indica la superficie totale del tetraedro e che

$$V_{(\text{TETRAEDRO})} = \frac{1}{3} \cdot A(\text{BASE}) \cdot \overline{DK} :$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \cdot 4r \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$$

N.B. Questa prima parte del problema poteva essere svolta in modo sintetico osservando che il volume del tetraedro può trovarsi come somma di quattro piramidi uguali con area di base A_b e altezza $h=r$, da cui facilmente: $V = 4 \left(\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \right) = 4 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \cdot r \right) = \frac{1}{3} S \cdot r$. La risoluzione scelta è dovuta al fatto che sono stati trovati elementi utili per il prosieguo.

B) La sfera inscritta in T è ovviamente circoscritta al tetraedro T' e quindi il rapporto tra gli spigoli sarà uguale al rapporto tra i raggi r ed r' delle rispettive sfere circoscritte a T e a T' ; si ha allora: $r' = \overline{OK} = \frac{s}{12}\sqrt{6}$

e $r = \overline{OD} = \frac{3s}{12}\sqrt{6} = \frac{s}{4}\sqrt{6}$, poiché $r' + r = \overline{DK} = \frac{s}{3}\sqrt{6}$. Ne segue che il rapporto tra i raggi (e quindi tra gli

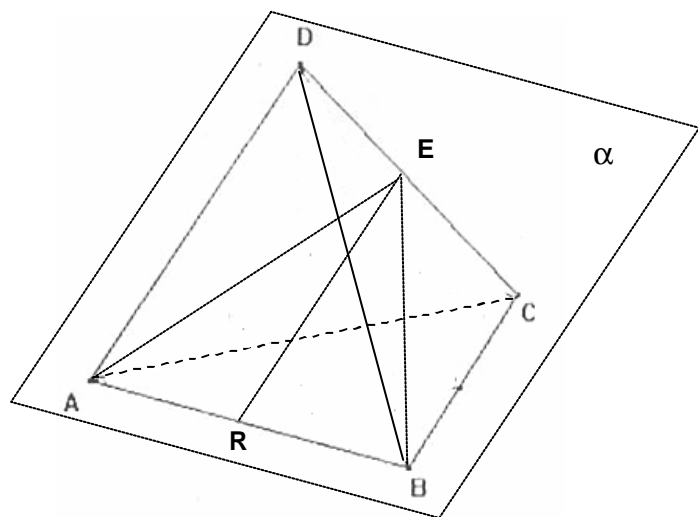
spigoli) sarà: $\frac{r}{r'} = 3$ e, per la similitudine tra T e T' ,

il rapporto tra i volumi sarà: $\frac{V}{V'} = 3^3 = 27$.

C) Il piano ABE , perpendicolare allo spigolo CD , interseca CD nel suo punto medio; segue che BE è altezza e mediana (e bisettrice) della faccia DBC e analogamente AE lo è della faccia ACD .

Quindi la distanza ER è l'altezza del triangolo isoscele

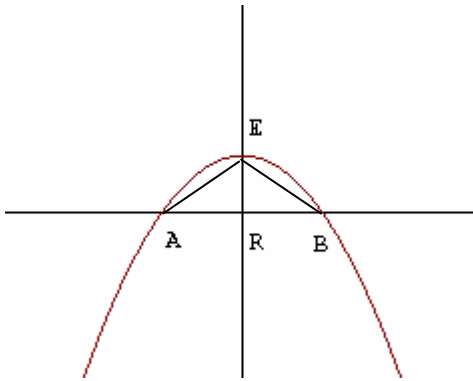
$$\text{cui: } \overline{ER} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{BR}^2} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\sqrt{3} \right)^2 - \left(\frac{s}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} s.$$



D) Scelto un sistema di riferimento avente origine in R , asse delle y coincidente con la retta orientata RE e l'asse delle x coincidente con la retta orientata RB , si ottiene la parabola di vertice $V\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$ e passante

per $B\left(\frac{s}{2}; 0\right)$. Dal sistema:
$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ b = 0 \\ 0 = a \cdot \frac{s^2}{4} + b \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}$$
, con facili calcoli si ottiene quindi l'equazione:

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}s$$



E) L'area A cercata è data dalla semidifferenza tra le due aree A_1 ed A_2 , ove A_1 =area del segmento parabolico AEB e A_2 =area del triangolo AEB .

Si ottiene: $A_1 = \frac{2}{3} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}s = \frac{\sqrt{2}}{3}s^2$ e $A_2 = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}s = \frac{\sqrt{2}}{4}s^2$ e quindi:

$$A = \frac{1}{2}(A_1 - A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}s^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}s^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{24}s^2$$

Imponendo che tale area abbia valore $\frac{\sqrt{2}}{3}cm^2$, si ha infine $\frac{\sqrt{2}}{24}s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}cm^2 \Rightarrow s^2 = 8cm^2 \Rightarrow s = 2\sqrt{2}cm$.