QUESTIONARIO 6-10

Quesito 6

Poiché la funzione polinomiale $f(x) = (2x-1)^7(4-2x)^5$ è continua in tutto R e quindi nell'intervallo $\left[\frac{1}{2} \le x \le 2\right]$, per il teorema di Weierstrass: «*Se f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato I, fra i valori da essa assunti ve ne è uno massimo e uno minimo (che possono anche non essere diversi)*» la funzione ammette quindi massimo o minimo assoluto.
Precisamente, poiché la funzione è sempre non negativa nell'intervallo $\left[\frac{1}{2} \le x \le 2\right]$ e assume valore zero per $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$, in tali punti presenta il minimo assoluto.
Dalla derivata prima della funzione: $f'(x) = 6(2x-1)^6(4-2x)^4(11-8x)$ si può dedurre immediatamente che i valori stazionari $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$ sono flessi a tangente orizzontale (soluzione di ordine pari nella derivata prima) e in essi, come già visto, la funzione assume valore zero; l'unico punto stremante, in questo caso massimo relativo ed anche assoluto, si ha per l'altro valore stazionario $x = \frac{11}{8} \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ e $f\left(\frac{11}{8}\right) \cong 153{,}3968$.

Quesito 7

Preso *a*>0, considerata la funzione integrale $f(x) = \int_x^{x+1} \ln t\, dt = -\int_a^x \ln t\, dt + \int_a^{x+1} \ln t\, dt$, per il teorema di Torricelli si ha: $f'(x) = -\ln x + \ln(x+1) = \ln\frac{x+1}{x}$ con $x>0$.

Quesito 8

Per il Teorema di Lagrange, una funzione $f(x)$ continua in [1,3] e derivabile in]1,3[ammette almeno un c∈]1,3[tale che: $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(c)$ e quindi $f(3) = f(1) + 2f'(c) = 1 + 2f'(c)$. Poiché si ha $0 \le f'(x) \le 2$ per ogni *x* appartenente a]1,3[e quindi anche per il valore *c*, si avrà:
$1 + 2\cdot 0 \le 1 + 2f'(c) \le 1 + 2\cdot 2 \Rightarrow 1 \le f(3) \le 5$ che è quanto dovevamo dimostrare.

Quesito 9

La funzione $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$ ha per dominio la soluzione del sistema: $\begin{cases} x^2-1 \ge 0 \\ 1-x^2 \ge 0 \end{cases}$ che porta alla soluzione *x*=±1. Per cui il luogo geometrico assegnato è la coppia di punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ e la risposta corretta è la B).

Quesito 10

Tenuto conto che: $\int_0^6 f(x)\,dx = b$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = a$ e applicando le proprietà degli integrali si ottiene:

$$\ln 2 = \int_0^3 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 f(2x)\,d(2x) = \frac{1}{2}b \quad \text{e}$$

$$\ln 4 = \int_1^3 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_2^6 f(2x)\,d(2x) = \frac{1}{2}\int_2^0 f(2x)\,d(2x) + \frac{1}{2}\int_0^6 f(2x)\,d(2x) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\ .$$

Ne segue: $\begin{cases} \frac{1}{2}b = \ln 2 \\ \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = \ln 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2(\ln 2 - \ln 4) = -2\ln 2 \\ b = 2\ln 2 \end{cases}$.

OSSERVAZIONE.

Allo stesso risultato si giunge operando la sostituzione $2x=t \Rightarrow x = \frac{t}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$, tenuto conto che

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 f(t)\,dt = b \quad \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(t)\,dt = a\ .$$