

SOLUZIONE PROBLEMA 2

- a. Intanto la lunghezza di ciascuno dei tre lati dovrà essere positiva, per cui:

$$\begin{cases} a+2x > 0 \\ a-x > 0 \\ 2a-x > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{2} < x < a$$

Poiché inoltre ciascun lato deve essere minore della somma degli altri due, si ha anche:

$$\begin{cases} a+2x < (a-x) + (2a-x) \\ a-x < (a+2x) + (2a-x) \\ 2a-x < (a+2x) + (a-x) \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{a}{2}, \text{ che è anche la condizione conclusiva.}$$

- b. Per stabilire se fra i triangoli non degeneri ne esiste uno di area massima o minima, calcoliamo intanto l'area con la formula di Erone: $S = \sqrt{p(p-l_1)(p-l_2)(p-l_3)}$, dove con l_1, l_2 ed l_3 abbiamo indicato i lati nell'ordine assegnati e con p il semiperimetro ($p=2a$).

$$\text{Si ha: } S(x) = \sqrt{2a \cdot [2a - (a+2x)] \cdot [2a - (a-x)] \cdot [2a - (2a-x)]} = \sqrt{2ax(-2x^2 - ax + a^2)}.$$

Per rendere massima o minima l'area del triangolo dobbiamo derivare la funzione $S(x)$ oppure più semplicemente, poiché ci interessano i suoi valori stazionari, il suo quadrato $S(x)=Y$ (cioè il radicando).

Si ottiene $Y' = 2a(-2x^2 - ax + a^2) + 2ax(-4x - a) = 2a(-6x^2 - 2ax + a^2)$, da cui $Y'=0 \Rightarrow$

$$x = -a\left(\frac{\sqrt{7}+1}{6}\right) \text{ e } x = a\left(\frac{\sqrt{7}-1}{6}\right), \text{ delle quali la prima non è accettabile.}$$

Posto $Y' > 0$ si deduce che la funzione Y cresce per valori interni e quindi che

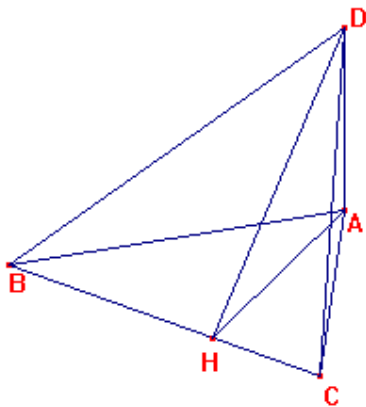
$$x = a\left(\frac{\sqrt{7}-1}{6}\right) \cong 0,27a \text{ è il valore che rende massima l'area.}$$

- c. Poiché $0 < \frac{a}{4} < \frac{a}{2}$ per $x = \frac{a}{4}$ si hanno lati di un triangolo non degeneri di lunghezze

rispettivamente uguali a: $l_1 = \frac{3}{2}a = \frac{6}{4}a$, $l_2 = \frac{3}{4}a$ e $l_3 = \frac{7}{4}a$, cioè tre lati rispettivamente

proporzionali ai numeri 6, 3 e 7. Per fare la costruzione geometrica con riga e compasso, basterà disegnare un segmento $CB=7u$ e successivamente puntare con il compasso prima in C e costruirsi un arco di raggio $6u$ e poi in B e costruirsi un arco di raggio $3u$; il punto A di intersezione tra i due archi è il terzo vertice del triangolo.

Per stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo poiché, essendo CB è il lato maggiore, risulta $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 < \overline{CB}^2$ il triangolo sarà ottusangolo in \hat{A} .



- d. Dopo aver condotto per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e preso su di essa un punto D tale che AD sia lungo a , dobbiamo calcolare l'altezza AH relativa alla base BC . Intanto per $x = \frac{a}{4}$ l'area del

triangolo ABC sarà $S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$ e quindi

applicando la formula inversa dell'area si ha:

$$\overline{AH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a^2 \cdot \frac{4}{7a} = \frac{2\sqrt{5}}{7}a. \text{ Infine dal}$$

triangolo rettangolo DAH , ricordando che $\overline{AH} \cdot \operatorname{tg} \hat{DHA} = \overline{AD}$ si deduce

$$\operatorname{tg} \hat{DHA} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{5}}{7}a} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \cong 1,5652, \text{ da cui } \hat{DHA} \cong 57,42^\circ, \text{ cioè l'angolo richiesto è}$$

compreso tra 57° e 58° .