

SOLUZIONE PROBLEMA 1

La curva k di equazione $y = f(x)$, dove $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$ ha dominio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\sqrt[3]{2}\}$.

- a) Per determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$, basterà studiarne il segno risolvendo la disequazione $\frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} > 0$.

Poiché il numeratore è sempre maggiore di zero, si ha $y > 0$ per $x > -\sqrt[3]{2}$ e $y < 0$ per $x < -\sqrt[3]{2}$.

- b) L'equazione della parabola richiesta sarà del tipo $y = ax^2 + bx$ in quanto essa passa per l'origine; poiché la parabola passa anche per $(-1; f(-1)=3) \Rightarrow 3=a-b$, l'equazione diviene: $y = (b+3)x^2 + bx$. Per eliminare l'ultimo parametro occorre calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$, calcolare il coefficiente angolare della tangente in $x=-1$ e porre la condizione di perpendicolarità per la tangente alla parabola in $x=-1$.

Poiché $f'(x) = \frac{2x(x^3 + 2) - 3x^2(x^2 + 2)}{(x^3 + 2)^2} = \frac{-x(x^3 + 6x - 4)}{(x^3 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -11$ e quindi il

coefficiente della tangente alla parabola nello stesso punto $m = \frac{1}{11}$. Infine da

$m = 2ax_0 + b \Rightarrow y'(x_0) = \frac{1}{11} = 2(b+3)(-1) + b \Rightarrow 1 = 11(-6-b) \Rightarrow b = -\frac{67}{11}$; ricavato il valore

di $a = -\frac{34}{11}$, si ha l'equazione richiesta $y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x$.

- c) Per trovare le intersezione tra la retta tangente a k nel punto di ascissa -1 di equazione:

$y - 3 = -11(x + 1)$ e la curva data bisognerà risolvere il sistema:
$$\begin{cases} y = 3 - 11(x + 1) \\ y = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} \end{cases}$$
. Si ottiene:

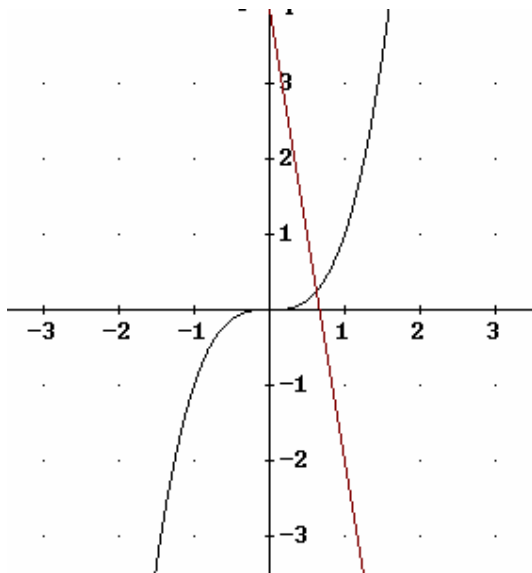
$$\frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} = -11x - 8 \Rightarrow x^2 + 2 = -11x^4 - 8x^3 - 22x - 16 \Rightarrow 11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$$

Poiché la retta è tangente alla curva in $x=-1$, l'equazione si può abbassare due volte di grado con la regola di Ruffini per tale valore fino ad ottenere:

$11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = (x - 1)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$ e poiché $11x^2 - 14x + 18 = 0$ non ammette soluzioni reali $\Rightarrow x = -1$ è l'unica intersezione (doppia) tra la curva e la retta tangente.

- d) Per determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x basterà trovarne i suoi punti stazionari (o estremali), quelli cioè in cui la derivata prima si annulla.

Dall'equazione: $f'(x) = \frac{-x(x^3 + 6x - 4)}{(x^3 + 2)^2} = 0$ si deduce $x=0$ e $x^3 + 6x - 4 = 0$.



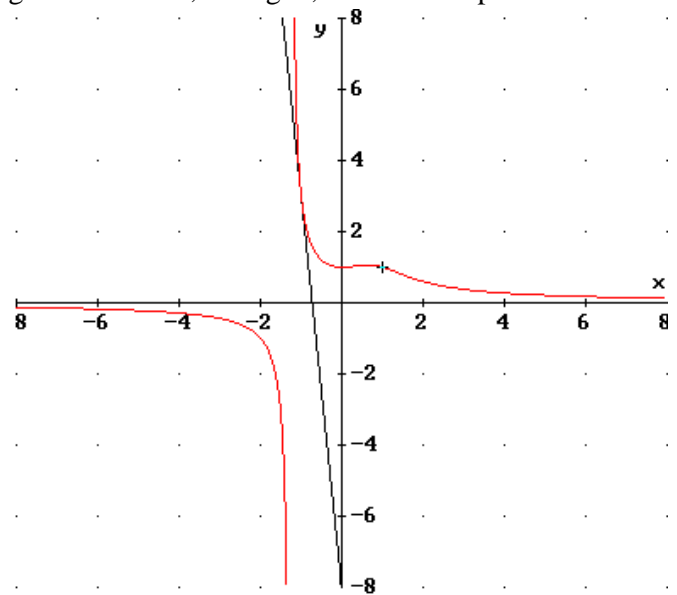
L'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$, che non si abbassa di grado con la regola di Ruffini, va risolta per via grafica ponendo ad es. $x^3 = 4 - 6x$. Si ottiene allora la seguente rappresentazione grafica, da cui si deduce che l'equazione ha una soluzione per un certo valore α , tale che $0 < \alpha < \frac{2}{3}$.

Possiamo concludere che la curva k ha due punti in cui la retta tangente è orizzontale.

OSSERVAZIONE. Anche se non richiesto, possiamo dare una rappresentazione grafica approssimata della funzione di cui conosciamo già il dominio, il segno, la derivata prima ed i

suoi punti stazionari e dopo aver osservato che:

La funzione, continua e derivabile nel suo dominio, ha per asintoto verticale $x = -\sqrt[3]{2}$ e per asintoto orizzontale la retta $y=0$ (il denominatore è infatti infinito di ordine superiore); in $x=0$ la funzione deve avere necessariamente un minimo (di ordinata 2) e in $x=\alpha$ un massimo (di cui non sappiamo l'ordinata, che dovrà essere però maggiore di 2) e tenderà asintoticamente all'asse delle ascisse per $x \rightarrow \pm\infty$. Il grafico approssimato è a fianco riportato.



- d) Il teorema di Lagrange afferma che “Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile internamente ad esso, allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

In questo caso il teorema di Lagrange non è applicabile in quanto, relativamente all'intervallo richiesto $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$, la funzione $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$ non è definita e quindi non è continua in $x = -\sqrt[3]{2} \in]-\sqrt{2}, 0[$, per cui non sono soddisfatte tutte le condizioni che permettono l'applicazione del teorema stesso.